

# Essai nouvelles fonctionnalités PolyTeX 1.5

---

UTC

---

*automne 99*



# Sommaire

<b>I</b>	<b>Méthodes de recherche linéaire</b>	<b>3</b>
I.1	introduction . . . . .	4
<b>A</b>	<b>Exemples</b>	<b>6</b>
A.1	Exemples du chapitre I . . . . .	7
<b>B</b>	<b>Exercices</b>	<b>9</b>
B.1	Exercices du chapitre I . . . . .	10
B.2	Autres exercices . . . . .	12
<b>C</b>	<b>Documents</b>	<b>15</b>
C.1	Documents du chapitre I . . . . .	16

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

# Chapitre I

## Méthodes de recherche linéaire

I.1	<a href="#">introduction</a> . . . . .	4
-----	--	---

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# I.1 introduction

But de la recherche linéaire . . . . .	5
--	---

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exemples :**

[Exemple A.1.1](#)

**Exercices :**

[Exercice B.1.1](#)

[Exercice B.2.1](#)

**Documents :**

[Document C.1.1](#)

**Liens :**

[Animation](#)

[Lien](#)

On a vu que dans le cas non-quadratique les méthodes de descente :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \quad t_k > 0, \quad (\text{I.1.1})$$

nécessitent la recherche d'une valeur de  $t_k > 0$ , optimale ou non, vérifiant

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k).$$

On définit comme précédemment la fonction  $\varphi(t) = f(x_k + t d_k)$ . Rappelons que si  $f$  est différentiable, le pas optimal  $\hat{t}$  peut être caractérisé par

$$\begin{cases} \varphi'(\hat{t}) &= 0, \\ \varphi(\hat{t}) &\leq \varphi(t), \text{ pour } 0 \leq t \leq \hat{t}, \end{cases}$$

autrement dit,  $\hat{t}$  est un minimum local de  $\varphi$  qui assure de plus la décroissance de  $f$ . En fait, dans la plupart des algorithmes d'optimisation modernes, on ne fait jamais de recherche linéaire exacte, car trouver  $\hat{t}$  signifie qu'il va falloir calculer un grand nombre de fois la fonction  $\varphi$ , et cela peut être dissuasif du point de vue du temps de calcul. En pratique, on recherche plutôt une valeur de  $t$  qui assure une décroissance suffisante de  $f$ . Cela conduit à la notion d'intervalle de sécurité. Il faut maintenant préciser quelles sont les relations sur  $\varphi$  qui vont nous permettre de caractériser les valeurs de  $t$  convenables, ainsi que les techniques utilisées pour réduire l'intervalle (point 1 ci-dessus).

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe A

## Exemples

A.1	Exemples du chapitre I	7
-----	------------------------	---

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

## A.1 Exemples du chapitre I

A.1.1 Un exemple exemplaire . . . . .	8
---------------------------------------	---

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

Par exemple,

$$x = y$$

[Retour au grain](#)

### **Exemple A.1.1**

Un exemple  
exemplaire

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



# Annexe B

## Exercices

B.1	Exercices du chapitre I . . . . .	10
B.2	Autres exercices . . . . .	12

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## B.1 Exercices du chapitre I

<a href="#">B.1.1 Exercice dans un grain</a> . . . . .	11
--	----

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Voici un exercice.

[Retour au grain](#)

[Solution](#)

### **Exercice B.1.1**

Exercice dans un  
grain

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## B.2 Autres exercices

B.2.1	Méthode du gradient et règle de Goldstein . . . . .	13
-------	---	----

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Soit  $J : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $C^2$  et coercive, c'est à dire  $J$  continue et

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty.$$

On a montré en cours que cette propriété assure que  $J$  est bornée inférieurement.

On considère un algorithme de gradient

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k g_k,$$

où  $g_k = \nabla J(u_k)$ . On supposera qu'à chaque itération le pas  $\rho_k$  satisfait à la règle de Goldstein

$$\varphi(0) + m_2 \varphi'(0) \rho_k \leq \varphi(\rho_k) \leq \varphi(0) + m_1 \varphi'(0) \rho_k,$$

où  $\varphi(\rho) = J(u_k - \rho g_k)$  et  $0 < m_1 < m_2 < 1$ .

1. Calculer  $\varphi'(0)$ .
2. (a) Montrer que  $m_1 \rho_k \|g_k\|^2 \leq J(u_k) - J(u_{k+1})$ .  
(b) En déduire que  $J(u_k)$  converge et que  $\rho_k \|g_k\|^2$  tend vers 0.  
(c) Montrer que la suite  $u_k$  est bornée.
3. (a) En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 montrer qu'il existe  $\bar{\rho} \in [0, \rho_k]$  tel que

$$(1 - m_2) \|g_k\|^2 \leq \frac{\rho_k}{2} < \nabla^2 J(\bar{u}) g_k, g_k > ,$$

avec  $\bar{u} = u_k + \bar{\rho} g_k$ .

$$(1 - m_2) \|g_k\|^2 \leq R \frac{\rho_k}{2} \|g_k\|^2,$$

et que donc  $\|g_k\|^2$  tend vers 0.

Question 1 [Aide 1](#)  
Question 2a [Aide 1](#)  
Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 2c [Aide 1](#) [Aide 2](#)  
Question 3a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

**Exercice B.2.1**  
Méthode du  
gradient et règle  
de Goldstein

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Annexe C

## Documents

C.1 Documents du chapitre I . . . . .	16
---------------------------------------	----

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## C.1 Documents du chapitre I

C.1.1 Exemple de document . . . . .	17
-------------------------------------	----

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents



Voici un document.

[Retour au grain](#)

### **Document C.1.1**

Exemple de  
document

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

Solution de l'exercice B.1.1

C'est facile non ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 1, Exercice B.2.1

$$\varphi'(0) = -\|g_k\|^2.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 2a, Exercice B.2.1

On utilise la partie droite de la règle de Goldstein, en notant que  $\varphi(0) = J(u_k)$  et  $\varphi(\rho_k) = J(u_{k+1})$ , soit

$$\varphi(\rho_k) \leq \varphi(0) + m_1 \varphi'(0) \rho_k \Leftrightarrow J(u_{k+1}) \leq J(u_k) - m_1 \rho_k \|g_k\|.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 1, Question 2b, Exercice B.2.1

La question précédente permet d'établir que  $J(u_k)$  est une suite décroissante. Puisque  $J$  est bornée inférieurement (à cause de la coercivité) la suite  $J(u_k)$  est donc convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, Question 2b, Exercice B.2.1

Comme on a de plus

$$0 \leq m_1 \rho_k \|g_k\|^2 \leq J(u_k) - J(u_{k+1}),$$

alors  $\rho_k \|g_k\|^2 \rightarrow 0$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 2c, Exercice B.2.1

On montre ce résultat par l'absurde

[Retour à l'exercice ▲](#)



Aide 2, Question 2c, Exercice B.2.1

Supposons que  $u_k$  n'est pas bornée. Il existe alors une sous-suite  $u_{i_k}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{i_k}\| = \infty$ .  
Donc  $J(u_{i_k}) \rightarrow \infty$ , ce qui est impossible puisque  $J(u_k)$  est convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, Question 3a, Exercice B.2.1

On écrit donc le developpement de Taylor de  $\varphi$  en 0 : il existe  $\bar{\rho} \in [0, \rho]$  tel que

$$\varphi(\rho_k) = \varphi(0) + \rho_k \varphi'(0) + \frac{\bar{\rho}^2}{2} \varphi''(\bar{\rho}),$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Aide 2, Question 3a, Exercice B.2.1

on a

$$\varphi''(\bar{\rho}) = \mathbf{g}_k^\top \nabla^2 \mathbf{J}(\mathbf{u}_k - \bar{\rho} \mathbf{g}_k) \mathbf{g}_k.$$

On a d'autre part (partie de gauche de la règle de Goldstein) :

$$\varphi(\rho_k) - \varphi(0) \geq m_2 \varphi'(0) \rho_k,$$

on peut donc écrire que

$$\rho_k \varphi'(0) + \frac{\bar{\rho}^2}{2} \varphi''(\bar{\rho}) \geq m_2 \varphi'(0) \rho_k,$$

ce qui donne, en remplaçant  $\varphi'(0)$  par  $-\|\mathbf{g}_k\|$ , l'inégalité demandée.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Aide 3, Question 3a, Exercice B.2.1

La fonction  $J$  étant  $C^2$ , son hessien est donc borné et il existe deux constantes  $r$  et  $R$  tq

$$r\|u\|^2 \leq u^\top \nabla^2 J(v)u \leq R\|u\|^2, \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n.$$

On a nécessairement  $R > 0$  puisque la question 3. (a) montre qu'il existe  $u, v$  tq  $v^\top \nabla^2 J(u)v > 0$ .  
On en déduit donc que

$$(1 - m_2)\|g_k\|^2 \leq R \frac{\rho_k}{2} \|g_k\|^2.$$

On a montré précédemment que  $\rho_k \|g_k\|^2 \rightarrow 0$ , la majoration ci-dessus montre donc que de plus  $\|g_k\|^2 \rightarrow 0$ . On en déduit donc que la méthode du gradient avec un pas choisi selon la règle de Goldstein permet de faire converger le gradient vers zéro (c'est bien la moindre des choses), mais on ne peut pas dire grand chose sur la convergence de la suite  $u_k$  elle même, sans information supplémentaire sur  $J$ . Par exemple si  $J$  est strictement convexe alors on peut en déduire que  $u_k$  converge.

[Retour à l'exercice ▲](#)