
Essai nouvelles fonctionnalités PolyTeX 1.5

UTC

automne 99

Sommaire

I	Le cours	4
1	Méthodes de recherche linéaire	5
1.1	introduction	6
1.1.1	But de la recherche linéaire	7
II	Les annexes	9
A	Les exemples	10
A.1	Exemples du chapitre 1	11
A.1.1	Un exemple exemplaire	11
B	Les exercices	12
B.1	Exercices du chapitre 1	13

B.1.1	Exercice dans un grain	13
B.2	Autres exercices	14
B.2.1	Méthode du gradient et règle de Goldstein	14
C	Les documents	16
C.1	Documents du chapitre 1	17
C.1.1	Exemple de document	17

Première partie

Le cours

1 Méthodes de recherche linéaire

1.1	introduction	6
-----	--	---

1.1 introduction

1.1.1	But de la recherche linéaire	7
-------	--	---

**But de la recherche
linéaire**

notion clé :
Recherche linéaire

Exemples :
[exemple A.1.1](#)

Exercices :
[exercice B.1.1](#)
[exercice B.2.1](#)

Documents :
[document C.1.1](#)

Liens :
[Animation](#)
[Lien](#)

On a vu que dans le cas non-quadratique les méthodes de descente :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \quad t_k > 0, \quad (1.1)$$

nécessitent la recherche d'une valeur de $t_k > 0$, optimale ou non, vérifiant

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k).$$

On définit comme précédemment la fonction $\varphi(t) = f(x_k + t d_k)$. Rappelons que si f est différentiable, le pas optimal \hat{t} peut être caractérisé par

$$\begin{cases} \varphi'(\hat{t}) = 0, \\ \varphi(\hat{t}) \leq \varphi(t), \text{ pour } 0 \leq t \leq \hat{t}, \end{cases}$$

autrement dit, \hat{t} est un minimum local de φ qui assure de plus la décroissance de f . En fait, dans la plupart des algorithmes d'optimisation modernes, on ne fait jamais de recherche linéaire exacte, car trouver \hat{t} signifie qu'il va falloir calculer un grand nombre de fois la fonction φ , et cela peut être dissuasif du point de vue du temps de calcul. En pratique, on recherche plutôt une valeur de t qui assure une décroissance suffisante de



f. Cela conduit à la notion d'intervalle de sécurité. Il faut maintenant préciser quelles sont les relations sur φ qui vont nous permettre de caractériser les valeurs de t convenables, ainsi que les techniques utilisées pour réduire l'intervalle (point n°1 ci-dessus).

Deuxième partie

Les annexes

Annexe A

Les exemples

Table des exemples

A.1 :	Exemples du chapitre 1	11
Exemple A.1.1 :	Un exemple exemplaire	11

A.1 Exemples du chapitre 1

Exemple A.1.1 Un exemple exemplaire

Par exemple,

$$x = y$$

[Retour au grain ▲](#)

Annexe B

Les exercices

Table des exercices

B.1 :	Exercices du chapitre 1	13
Exercice B.1.1 :	Exercice dans un grain	13
B.2 :	Autres exercices	14
Exercice B.2.1 :	Méthode du gradient et règle de Goldstein	14

B.1 Exercices du chapitre 1

Exercice B.1.1 Exercice dans un grain

Voici un exercice.

[Retour au grain ▲](#)

[Solution](#)

B.2 Autres exercices

Exercice B.2.1 Méthode du gradient et règle de Goldstein

Soit $J : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, C^2 et coercive, c'est à dire J continue et

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty.$$

On a montré en cours que cette propriété assure que J est bornée inférieurement.

On considère un algorithme de gradient

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k g_k,$$

où $g_k = \nabla J(u_k)$. On supposera qu'à chaque itération le pas ρ_k satisfait à la règle de Goldstein

$$\varphi(0) + m_2 \varphi'(0) \rho_k \leq \varphi(\rho_k) \leq \varphi(0) + m_1 \varphi'(0) \rho_k,$$

où $\varphi(\rho) = J(u_k - \rho g_k)$ et $0 < m_1 < m_2 < 1$.

1. Calculer $\varphi'(0)$.
2. (a) Montrer que $m_1 \rho_k \|g_k\|^2 \leq J(u_k) - J(u_{k+1})$.



- (b) En déduire que $J(u_k)$ converge et que $\rho_k \|g_k\|^2$ tend vers 0.
- (c) Montrer que la suite u_k est bornée.
3. (a) En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 montrer qu'il existe $\bar{\rho} \in [0, \rho_k]$ tel que

$$(1 - m_2) \|g_k\|^2 \leq \frac{\rho_k}{2} \langle \nabla^2 J(\bar{u}) g_k, g_k \rangle,$$

avec $\bar{u} = u_k + \bar{\rho} g_k$.

$$(1 - m_2) \|g_k\|^2 \leq R \frac{\rho_k}{2} \|g_k\|^2,$$

et que donc $\|g_k\|^2$ tend vers 0.

-
- Question 1 [Aide 1](#)
- Question 2a [Aide 1](#)
- Question 2b [Aide 1](#) [Aide 2](#)
- Question 2c [Aide 1](#) [Aide 2](#)
- Question 3a [Aide 1](#) [Aide 2](#) [Aide 3](#)

Annexe C

Les documents

Table des documents

C.1 :	Documents du chapitre 1	17
Document C.1.1 :	Exemple de document	17

C.1 Documents du chapitre 1

Document C.1.1 Exemple de document

Voici un document.

[Retour au grain ▲](#)

Entrées canoniques

Le gras indique un grain où le concept est défini ;
l’italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple,
le gras italique à un document, et le romain à un grain où
le concept est mentionné.

B

Barre d’outils PDF **52**

C

Chapitre **19**

Chapitre des documents **32**

Chapitre des exemples **34**

Chapitre des exercices **36**

Charte d’appropriation **10, 12, 13**

Charte de diffusion **10, 12, 13**

Charte pédagogique **7, 10, 12–14, 80**

Chaîne d’édition **4**

Commentaires **39**

Compilation du cours **4, 30, 68**

Concepts et transparents **45, 46, 47, 55**

D

Documents **27, 38, 39**

E

Ecrire des transparents **44, 45, 63**

Edition du texte source **66, 70**

Entrées canoniques **61**

Exemples **29, 40**

Exercices **28, 42**

G

Grain de connaissance **21, 38, 40, 42, 61**

I

Index nominum **24, 60**

Index rerum **23, 59, 61**

Indexation des noms **24, 60**

Indexation des notions **23, 59**

Installation de l'éditeur	4, 66, 72
Installation de LaTeX	4, 74
Installation du ZIP	73
Instructions de PolyTeX	14

N

Navigation contextuelle	54
Navigation effective	57
Navigation globale	53
Navigation logique	51
Navigation physique	50
Navigation sémantique et grain	55
Navigation sémantique et transparent	56

P

Production du PDF	70, 71
Projets pédagogiques	7, 10, 80

Q

Quick and Dirty	8
-----------------------	---

R

Renvoi à un document	21, 25, 27, 38, 55
Renvoi à un exemple	21, 25, 29, 40, 55
Renvoi à un exercice	21, 25, 28, 42, 55
Renvoi à un grain	21, 25, 26, 55
Renvoi à une référence	30, 78
Renvois à partir d'un grain	25, 40, 42, 55
Rédaction d'un cours	48

S

Section	20
Section dans les documents	33
Section dans les exemples	35
Section dans les exercices	37
Site PolyTeX	6
Sommaire	58
Structuration du cours	16, 66

T

Table des transparents	63
Titre du cours	18
Transparent	45, 46, 47

Transparents et concepts 44—46, 47, 56

V

Visualisation du cours 70

Solution de l'exercice B.1.1

C'est facile non ?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 1, Exercice B.2.1

$$\varphi'(0) = -\|g_k\|^2.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 2a, Exercice B.2.1

On utilise la partie droite de la règle de Goldstein, en notant que $\varphi(0) = J(u_k)$ et $\varphi(\rho_k) = J(u_{k+1})$, soit

$$\varphi(\rho_k) \leq \varphi(0) + m_1 \varphi'(0) \rho_k \Leftrightarrow J(u_{k+1}) \leq J(u_k) - m_1 \rho_k \|g_k\|.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 2b, Exercice B.2.1

La question précédente permet d'établir que $J(u_k)$ est une suite décroissante. Puisque J est bornée inférieurement (à cause de la coercivité) la suite $J(u_k)$ est donc convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 2b, Exercice B.2.1

Comme on a de plus

$$0 \leq m_1 \rho_k \|g_k\|^2 \leq J(u_k) - J(u_{k+1}),$$

alors $\rho_k \|g_k\|^2 \rightarrow 0$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 2c, Exercice B.2.1

On montre ce résultat par l'absurde

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 2c, Exercice B.2.1

Supposons que u_k n'est pas bornée. Il existe alors une sous-suite u_{i_k} telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{i_k}\| = \infty$. Donc $J(u_{i_k}) \rightarrow \infty$, ce qui est impossible puisque $J(u_k)$ est convergente.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 1, question 3a, Exercice B.2.1

On écrit donc le developpement de Taylor de φ en 0 : il existe $\bar{\rho} \in [0, \rho]$ tel que

$$\varphi(\rho_k) = \varphi(0) + \rho_k \varphi'(0) + \frac{\bar{\rho}^2}{2} \varphi''(\bar{\rho}),$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 2, question 3a, Exercice B.2.1

on a

$$\varphi''(\bar{\rho}) = g_k^\top \nabla^2 J(u_k - \bar{\rho} g_k) g_k.$$

On a d'autre part (partie de gauche de la règle de Goldstein) :

$$\varphi(\rho_k) - \varphi(0) \geq m_2 \varphi'(0) \rho_k,$$

on peut donc écrire que

$$\rho_k \varphi'(0) + \frac{\bar{\rho}^2}{2} \varphi''(\bar{\rho}) \geq m_2 \varphi'(0) \rho_k,$$

ce qui donne, en remplaçant $\varphi'(0)$ par $-\|g_k\|$, l'inégalité demandée.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Aide 3, question 3a, Exercice B.2.1

La fonction J étant C^2 , son hessien est donc borné et il existe deux constantes r et R tq

$$r\|u\|^2 \leq u^\top \nabla^2 J(v)u \leq R\|u\|^2, \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n.$$

On a nécessairement $R > 0$ puisque la question 3. (a) montre qu'il existe u, v tq $v^\top \nabla^2 J(u)v > 0$. On en déduit donc que

$$(1 - m_2)\|g_k\|^2 \leq R \frac{\rho_k}{2} \|g_k\|^2.$$

On a montré précédemment que $\rho_k \|g_k\|^2 \rightarrow 0$, la majoration ci-dessus montre donc que de plus $\|g_k\|^2 \rightarrow 0$. On en déduit donc que la méthode du gradient avec un pas choisi selon la règle de Goldstein permet de faire converger le gradient vers zéro (c'est bien la moindre des choses), mais on ne peut pas dire grand chose sur la convergence de la suite u_k elle-même, sans information supplémentaire sur J . Par exemple si J est strictement convexe alors on peut en déduire que u_k converge.

[Retour à l'exercice ▲](#)